

## LOGARITAMSKE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

Pre nego što krenete u rešavanje jednačine savetujemo vam da se podsetite pravila za logaritme.

1) Rešiti jednačine:

a)  $\log_3(2x+3) = 2$

b)  $\log_4(3x+4) = 3$

c)  $\log\sqrt{3x+1} = \frac{1}{2}$

Rešenje:

a)  $\log_3(2x+3) = 2 \rightarrow$  Iskoristićemo definiciju  $\log_A B = \otimes \Leftrightarrow B = A^{\otimes}$

Dakle:

$$\begin{array}{ll} 2x+3 = 3^2 & 2x+3 > 0 \\ 2x+3 = 9 & \text{uz uslov } 2x > -3 \\ 2x = 6 & \\ x = 3 & x > -\frac{3}{2} \end{array}$$

Pošto je  $3 > -\frac{3}{2}$ , rešenje  $x=3$  je "dobro"

b)  $\log_4(3x+4) = 3 \rightarrow$  Opet po definiciji

$$\begin{array}{ll} 3x+4 = 4^3 & 3x+4 > 0 \\ 3x+4 = 64 & \text{uslov } 3x > -4 \\ 3x = 60 & \\ x = 20 & x > -\frac{4}{3} \end{array}$$

Rešenje zadovoljava uslov!!!

v)  $\log\sqrt{3x+1} = \frac{1}{2} \rightarrow$  Primitimo da nema osnova, pa dopišemo 10 po dogovoru,.

$$\log_{10} \sqrt{3x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{3x+1} = 10^{\frac{1}{2}} \quad \text{uz uslov} \quad \sqrt{3x+1} > 0$$

$$\sqrt{3x+1} = \sqrt{10} \dots \dots / ()^2 \text{ kvadriramo} \quad 3x+1 > 0$$

$$3x = 9 \quad x > -\frac{1}{3}$$

$$x = 3$$

Dakle,  $3 > -\frac{1}{3}$ , dobro je rešenje.

2) Rešiti jednačine:

a)  $\log_2(x-1) + \log_2(x+2) = 2$

b)  $\log(x^2 + 19) - \log(x-8) = 2$

v)  $\log(5-x) + 2\log\sqrt{3-x} = 1$

Rešenja: Iskoristićemo  $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$

a)

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+2) = 2$$

$$\log_2(x-1)(x+2) = 2 \rightarrow \text{Uslovi } x-1 > 0 \text{ i } x+2 > 0$$

$$x > 1 \quad \text{i} \quad x > -2$$

Dalje po definiciju:

$$(x-1)(x+2) = 2^2$$

$$x^2 + 2x - x - 2 = 4$$

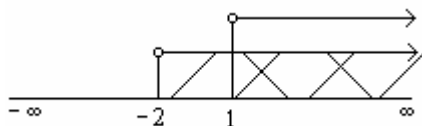
$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -3$$

Dalje se pitamo da li rešenje zadovoljavaju uslove:  $x > 1$  i  $x > -2$



$$x \in (1, \infty)$$

$$x_1 = 2 \rightarrow \text{Zadovoljava}$$

$$x_2 = -3 \rightarrow \text{Ne zadovoljava}$$

Dakle, jedino rešenje je  $x = 2$

b)  $\log(x^2 + 19) - \log(x - 8) = 2$

Dopišemo najpre osnovu 10

$$\log_{10}(x^2 + 19) - \log_{10}(x - 8) = 2$$

Pošto  $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

$$\log_{10} \frac{x^2 + 19}{x - 8} = 2 \text{ naravno uz uslove: } x^2 + 19 > 0 \text{ i } x - 8 > 0$$

$x > 8$

$$\frac{x^2 + 19}{x - 8} = 10^2$$

$$\frac{x^2 + 19}{x - 8} = 100$$

$$x^2 + 19 = 100(x - 8)$$

$$x^2 + 19 = 100x - 800$$

$$x^2 - 100x + 819 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{100 \pm 82}{2}$$

$$x_1 = 91$$

$$x_2 = 9$$

Oba rešenja "dobra" jer su veća od 8

v)  $\log(5 - x) + 2\log\sqrt{3 - x} = 1$

Uslovi su:

$$5 - x > 0 \qquad 3 - x > 0$$

$$-x > -5 \qquad \text{i} \qquad -x > -3$$

$$x < 5 \qquad x < 3$$

Dakle uslov je  $x < 3$

$$(5-x)(3-x) = 10^1$$

$$15 - 5x - 3x + x^2 - 10 = 0$$

$$x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{44}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{11}}{2} = \frac{2(4 \pm \sqrt{11})}{2} = 4 \pm \sqrt{11}$$

$$x_1 = 4 + \sqrt{11} \approx 7,32$$

$$x_2 = 4 - \sqrt{11} \approx 0,68$$

$x_1 = 4 + \sqrt{11}$  ne zadovoljava uslov, pa je jedino rešenje:  $x = 4 - \sqrt{11}$

**3) Rešiti jednačine:**

a)  $\log^2 x - 3 \log x + 2 = 0$

b)  $\log_2 x + \log_x = \frac{5}{2}$

Rešenja:

a) Uvodimo snenu  $\log x = t$  uz uslov  $x > 0$

$$\log^2 x - 3 \log x + 2 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = 1$$

Vratimo se u smenu  $\log_{10} x = 2$  i  $\log_{10} x = 1$

$$x = 10^2$$

$$x = 100$$

$$x = 10^1$$

$$x = 10$$

b)  $\log_2 x + \log_x = \frac{5}{2}$       kako je  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_b a} = \frac{5}{2} \rightarrow \text{Uvodimo smenu } \log_2 x = t \text{ uz uslove } x > 0 \text{ i } x \neq 1$$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \rightarrow \text{Sve pomnožimo sa } 2t$$

$$2t^2 + 2 = 5t$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = 2$$

$$t_2 = \frac{1}{2}$$

Vratimo se u smenu :  $\log_2 x = 2$       v       $\log_2 x = \frac{1}{2}$

$$x = 2^2$$

$$x = 4$$

$$x = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$x = \sqrt{2}$$

4) Rešiti jednačine:

a)  $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$

b)  $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$

Rešenje: U oba primera ćemo koristiti da je:

$$\log_{a^s} x = \frac{1}{s} \log_a x$$

a)

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$$

uslov  $x > 0$

$$\log_2 x + \log_{2^2} x + \log_{2^4} x = 7$$

$$\log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{4} \log_2 x = 7 / \cdot 4$$

$$4 \log_2 x + 2 \log_2 x + 1 \log_2 x = 28$$

$$7 \log_2 x = 28$$

$$\log_2 x = 4$$

$$x = 2^4 \Rightarrow x = 16$$

b)

$$\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$$

$$\log_3 x \cdot \log_{3^2} x \cdot \log_{3^3} x \cdot \log_{3^4} x = \frac{2}{3}$$

$$\log_3 x \cdot \frac{1}{2} \log_3 x \cdot \frac{1}{3} \log_3 x \cdot \frac{1}{4} \log_3 x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{24} \log_3^4 x = \frac{2}{3}$$

$$\log_3^4 x = 16 \Rightarrow \log_3 x = t$$

$$t^4 - 16 = 0 \Rightarrow (t^2)^2 - 4^2 = (t^2 - 4)(t^2 + 4) = 0$$

$$(t - 2)(t + 2)(t^2 + 4) = 0$$

odavde je  $t=2$  ili  $t=-2$

Kada se vratimo u smenu

$$\log_3 x = 2 \quad \vee \quad \log_3 x = -2$$

$$x = 3^2 \quad \quad \quad x = 3^{-2}$$

$$x = 9 \quad \quad \quad \vee \quad x = \frac{1}{9}$$

5) Rešiti jednačine:

a)  $\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2$

b)  $\log(7 - 2^x) - \log(5 + 4^x) + \log 7 = 0$

Rešenja

a)

$$\log_{\sqrt{5}}(4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}}(2^x - 2) = 2$$

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{5}} \frac{4^x - 6}{2^x - 2} &= 2 \\ \frac{4^x - 6}{2^x - 2} &= \sqrt{5}^2 \\ 4^x - 6 &= 5(2^x - 2) \\ 4^x - 6 &= 5 \cdot 2^x - 10 \\ 4^x - 5 \cdot 2^x + 4 &= 0 \Rightarrow \text{smena } 2^x = t \\ t^2 - 5t + 4 &= 0 \\ t_{1,2} &= \frac{5 \pm 3}{2} \\ t_1 &= 4 \\ t_2 &= 1 \\ 2^x &= 4 \quad \vee \quad 2^x = 1 \\ 2^x &= 2^2 \quad \quad \quad x = 0 \\ x &= 2\end{aligned}$$

Ovde je najbolje da proverimo rešenja u početnoj jednačini → x=2 je jedino rešenje

b)

$$\begin{aligned}\log(7 - 2^x) - \log(5 + 4^x) + \log 7 &= 0 \\ \log_{10}(7 - 2^x) - \log_{10}(5 + 4^x) + \log_{10} 7 &= 0 \\ \log_{10}(7 - 2^x) \cdot 7 = \log_{10}(5 + 4^x) &\dots\dots\dots / \text{ANTILOGARITMOVANJE} \\ (7 - 2^x) \cdot 7 = 5 + 4^x & \\ 49 - 7 \cdot 2^x = 5 + 4^x & \\ 49 - 7 \cdot 2^x - 5 - 4^x & \\ -4^x - 7 \cdot 2^x + 44 = 0 / (-1) & \\ 4^x + 7 \cdot 2^x - 44 = 0 &\dots\dots\dots \text{smena } 2^x = t \\ t^2 + 7t - 44 = 0 & \\ t_{1,2} = \frac{-7 \pm 15}{2} & \\ t_1 = 4 & \\ t_2 = -11 &\end{aligned}$$

Vratimo se u smenu:

$$\begin{aligned}2^x &= 4 & \text{ili} & & 2^x &= -11 \text{ nema rešenja} \\2^x &= 2^2 \\x &= 2\end{aligned}$$

Uslovi su  $7 - 2^x > 0$  i  $5 + 4^x > 0$  a rešenje je  $x=2$  ih očigledno zadovoljava

6) Rešiti jednačine:

$$\begin{aligned}\text{a) } x^{1+\log x} &= 3x \\ \text{b) } x^{1+\log_4 x-2} &= 2^{3(\log_4 x-1)}\end{aligned}$$

Ovo je tip zadatka gde moramo logaritmovati obe strane za odgovarajuću osnovu!!!

a)

$$\begin{aligned}x^{1+\log x} &= 3x \dots \dots \dots / \log_3 \\ \log_3 x^{1+\log x} &= \log_3 3x & \text{važi } \log_a b^n &= n \log_a b \\ (1 + \log_3 x) \log_3 x &= \log_3 3 + \log_3 x \dots \dots \dots \Rightarrow \text{smena } \log_3 x = t \\ (1 + t) \cdot t &= 1 + t \\ t + t^2 &= 1 + t \\ t^2 &= 1 - t + t \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1\end{aligned}$$

Vratimo se u smenu:

$$\begin{aligned}\log_3 x &= 1 \text{ ili } \log_3 x = -1 \\ x &= 3^1 \text{ ili } x = 3^{-1} \\ x &= 3 \text{ ili } x = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x^{1+\log_4 x-2} &= 2^{3(\log_4 x-1)} \rightarrow \text{logaritmićemo za osnovu 4} \\ \log_4 x^{1+\log_4 x-2} &= \log_4 2^{3(\log_4 x-1)} \\ (\log_4 x - 2) \log_4 x &= 3(\log_4 x - 1) \log_4 2 \\ (\log_4 x - 2) \log_4 x &= 3(\log_4 x - 1) \log_{2^2} 2 \\ (\log_4 x - 2) \log_4 x &= 3(\log_4 x - 1) \cdot \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Smena  $\log_4 x = t$  :



$$(t-2) \cdot t = \frac{3}{2}(t-1)$$

$$2t(t-2) = 3(t-1)$$

$$2t^2 - 4t = 3t - 3$$

$$2t^2 - 4t - 3t + 3 = 0$$

$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$t_1 = 3$$

$$t_2 = \frac{1}{2}$$

Dakle:

$$\log_4 x = 3 \quad \text{ili} \quad \log_4 x = \frac{1}{2}$$

$$x = 4^3 \quad \text{ili} \quad x = 4^{\frac{1}{2}}$$

$$x = 64 \quad \text{ili} \quad x = 2$$

Za logaritamske nejednačine koristimo iste ‘‘trikove’’ kao za jednačine, ali vodimo računa:

- 1) Kad je osnova veća od 1 ( $a > 1$ ) prepisujemo znak nejednakosti jer je funkcija rastuća.
- 2) Kaj je osnova između 0 i 1 ( $0 < a < 1$ ) okrećemo znak nejednakosti jer je tada funkcija opadajuća.

Kad postavimo uslove tj. oblast definisanosti, nadjemo i rešimo nejednačinu, trebamo naći njihov presek.

1) Reši nejednačine:

a)  $\log_2(3x+4) \geq 0$

b)  $\log_{\frac{1}{2}}(4x-3) < 0$

v)  $\log_2(3x-5) < 1$

Rešenje:

a)

$$\log_2(3x+4) \geq 0 \quad \text{uslov} \quad 3x+4 > 0$$

$$3x+4 \geq 2^0 \quad 3x > -4$$

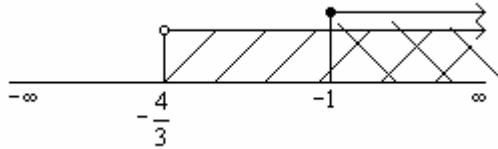
$$3x+4 \geq 1 \quad x > -\frac{4}{3}$$

$$3x \geq -3$$

$$x \geq -1$$

ne okrećemo znak jer je osnova veća od 1

Sad upakujemo rešenje i oblast definisanosti.



Konačno:  $x \in [-1, \infty)$

b)

$$\log_{\frac{1}{2}}(4x-3) < 0 \quad \text{uslov:} \quad 4x-3 > 0$$

$$4x > 3$$

**PAZI: Okrećemo znak!!!**  $x > \frac{3}{4}$

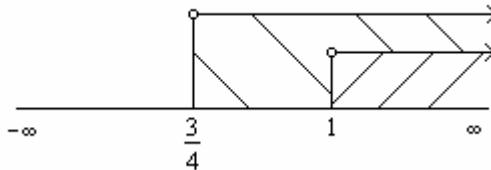
$$4x-3 > \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$4x-3 > 1$$

$$4x > 4$$

$$x > 1$$

Upakujemo ova dva:



Konačno:  $x \in (1, \infty)$

v)

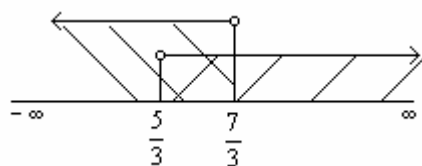
$$\log_2(3x-5) < 1 \quad \text{uslov} \quad 3x-5 > 0$$

$$3x-5 < 2^1 \quad 3x > 5$$

$$3x-5 < 2 \quad x > \frac{5}{3}$$

$$3x < 7$$

$$x < \frac{7}{3}$$



$$x \in \left( \frac{5}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

2) Rešiti nejednačine:

a)  $\log(x-2) > \log x$

b)  $\log_{0,5}(2x+6) > \log_{0,5}(x+8)$

Rešenja:

a)

$$\log(x-2) > \log x \quad \text{uslovi:} \quad x-2 > 0 \quad \text{i} \quad x > 0$$

$$x-2 > x \quad x > 2 \quad \text{I} \quad x > 0$$

$$x-x > 2 \quad \text{Dakle} \quad x > 2$$

$$0x > 2$$

Ovo nema rešenja, pa cela nejednačina nema rešenja!!!

b)

$$\log_{0,5}(2x+6) > \log_{0,5}(x+8)$$

**PAZI:** Okreće se smer

$$2x+6 < x+8$$

$$2x-x < 8-6$$

$$x < 2$$

Uslovi:

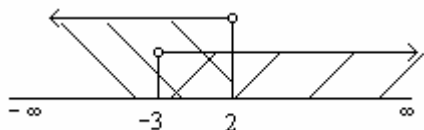
$$2x+6 > 0 \quad \wedge \quad x+8 > 0$$

$$x > -3 \quad \wedge \quad x > -4$$

$$x < 2$$

Uslovi:  $x > -3$

Upakujemo:



$x \in (-3, 2)$  konačno rešenje

3) Rešiti jednačine:

a)  $\log_3(x^2 - 5x + 6) < 0$

b)  $\log_{0,5}(x^2 - 4x + 3) \geq -3$

a)

$\log_3(x^2 - 5x + 6) < 0$  uslov  $x^2 - 5x + 6 > 0$

$x^2 - 5x + 6 < 3^0$

$x^2 - 5x + 6 < 1$

$x^2 - 5x + 6 < 0$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

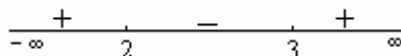
$x_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx 3,62$

$x_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx 1,38$

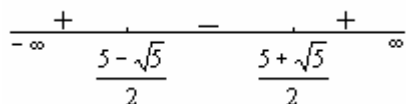
$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$

$x_1 = 3$

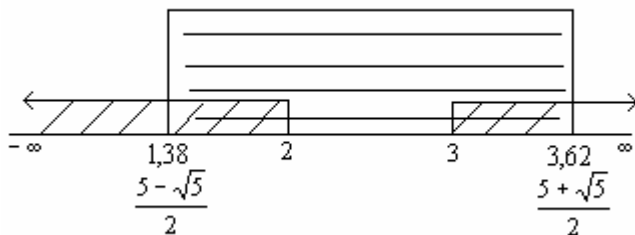
$x_2 = 2$



$x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$  Rešenje uslova



$x \in \left( \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)$  rešenje zadatka konačno rešenje dobijemo kad upakujemo ova dva



Dakle:

$x \in \left( \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, 2 \right) \cup \left( 3, \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)$

b)

$$\log_{0,5}(x^2 - 4x + 3) \geq -3$$

$$x^2 - 4x + 3 \leq (0,5)^2$$

$$x^2 - 4x + 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$x^2 - 4x + 3 \leq 2^3$$

$$x^2 - 4x + 3 \leq 8$$

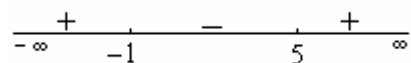
$$x^2 - 4x + 3 - 8 \leq 0$$

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -1$$



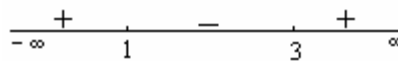
$$x \in [-1, 5]$$

uslov:  $x^2 - 4x + 3 > 0$

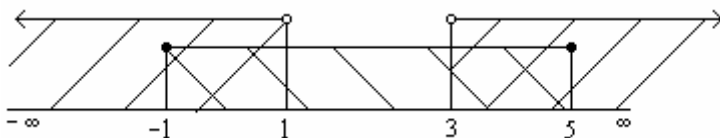
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$



Upakujemo rešenja:



$$x \in [-1, 1) \cup (3, 5] \text{ Konačno}$$