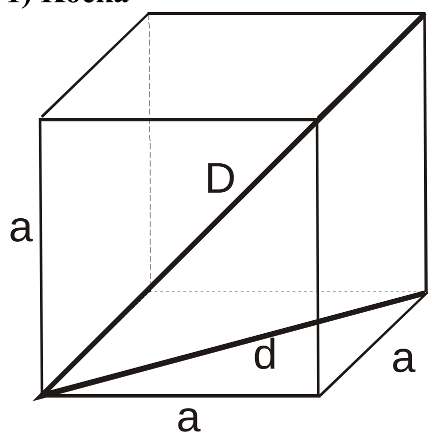
POLIDERI

PRIZME

Dve najpoznatije prizme su:

1) Kocka



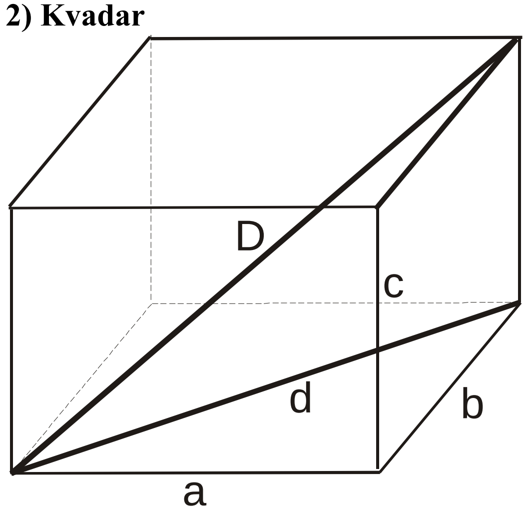
$P = 6a^2$ $\quad$ $d = a\sqrt{2}$ $\quad$ Kocka ima 12 osnovnih ivica.

$V = a^3$ $\quad$ $D = a\sqrt{3}$

Površina dijagonalnog preseka (on se najčešće obeležava sa Q ili P_{DP})

$$Q = a^2\sqrt{2}$$

2) Kvadar



$P = (ab + ac + bc)$

$V = abc$

$d^2 = a^2 + b^2$

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Površina dijagonalnog preseka je: $Q = d \cdot c$

Za sve ostale prizme ćemo ‘’sklapati’’ obrasce polazeći od dva osnovna:

$P = 2B + M$ i $V = B \cdot H$

Naravno oznake su:

→ B je baza (osnovna)
→ M je omotač (on se najčešće sastoji od pravougaonika)
→ H je visina

Treba izuzetno paziti na tekst zadatka:

1) Kad u zadatku kaže ‘’pravilna’’ prizma, to znači da se u osnovi nalazi pravilan mnogougao (jednakostranični trougao, kvadrat itd.)
2) Kad u zadatku kaže ‘’prava’’ prizma, to znači da visina ‘’stoji’’ normalno na osnovu, to jest da prizma nije kriva.

1) Ako se ivica kocke produži za 3cm, površina joj se poveća za $198\,cm^2$. Izračunati površinu i zapeminu kocke.

Obeležimo ivicu kocke sa a. Njena površina je $P = 6a^2$
Ako se ivica kocke poveća za 3cm, njena ivica će biti (a+3) a površina $P_1 = 6(a+3)^2$
Prema tekstu zadatka će biti:

$P - P_1 = 198cm^2$

$6(a+3)^2 - 6a^2 = 198 \rightarrow$ Sve podelimo sa 6

$(a+3)^2 - a^2 = 33$

$a^2 + 6a + 9 - a^2 = 33$

$6a = 33 - 9$

$6a = 24$

$a = 6cm$

$$P = 6a^2 \qquad V = a^3$$
$$P = 6 \cdot 6^2 \qquad V = 6^3$$
$$P = 6 \cdot 36 \qquad V = 216cm^3$$
$$P = 216cm^2$$

2) Ivice dve kocke stoje u razmeri 4:3. Kolike su im površine i zapremine ako se površina razlikuje za $168\,cm^2$?

Obeležimo sa a stranicu jedne kocke a sa a_1 stranice druge kocke.

$$a : a_1 = 4 : 3 \Rightarrow a = 4k \quad \text{i} \quad a_1 = 3k$$

$$P - P_1 = 168$$
$$6a^2 - 6a_1^2 = 168 \rightarrow \text{Delimo sve sa 6}$$
$$a^2 - a_1^2 = 28$$
$$(4k)^2 - (3k) = 28$$
$$16k^2 - 9k^2 = 28$$
$$7k^2 = 28$$
$$k^2 = 4$$
$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 4 \cdot k = 4 \cdot 2 = 8cm$$
$$a_1 = 3k = 3 \cdot 2 = 6cm$$

Sada nije teško naći P i V.

$$P = 6a^2 = 6 \cdot 8^2 = 384cm^2$$
$$V_1 = a^3 = 8^3 = 512cm^3$$

$$P_1 = 6a_1^2 = 6 \cdot 6^2 = 216cm^2$$
$$V_1 = a_1^3 = 6^3 = 216cm^3$$

3) Dimenzije kvadra su tri uzastopna cela broja, a dijagonala je $\sqrt{149}cm$. Iztačunati površinu i zapreminu kvadra.

Tri uzastopna cela broja možemo obeležiti sa $x-1, \;\; x, \;\; x+1$

Kako važi :

$$a=x-1$$
$$b=x$$
$$c=x+1$$

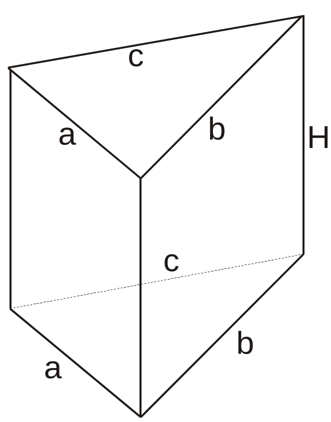
$$a^2+b^2+c^2=D^2$$
$$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=\sqrt{149}$$
$$x^2-2x+1+x^2+x^2+2x+1=149$$
$$3x^2=149-1-1$$
$$x^2=\frac{149}{3}$$
$$x^2=49$$
$$x=7cm$$

$$a=x-1=6cm$$
$$b=x=7cm$$
$$c=x+1=8cm$$

$$P=2(ab+ac+bc)=2(6\cdot7+6\cdot8+7\cdot8)=2\cdot146$$
$$P=292cm$$

$$V=a\cdot b\cdot c=6\cdot7\cdot8=336cm^3$$
$$V=336cm^3$$

4) Dužine osnovnih ivica prave trostrane prizme odnose se kao 17:10:9, dužina bočne ivice je 16cm, a površina $1440\,cm^2$. Odrediti dužine osnovnih ivica.



$$a:b:c=17:10:9$$
$$H=16cm$$
$$P=1440cm^2$$
$$\overline{a=?,b=?,c=?}$$

Iz $a:b:c=17:10:9 \quad\Rightarrow\quad a=17k, b=10k, c=9k$

$$P=2B+M$$

Bazu ćemo izraziti preko Heronovog obrasca

$B=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$ Gde $S=\dfrac{a+b+c}{2}$

$B=\sqrt{18k\cdot 1k\cdot 8k\cdot 9k}$

$S=\dfrac{17k+10k+9k}{2}$

$B=\sqrt{1296k^4}$

$S=18k$

$B=36k^2$

$M=aH+bH+cH=H(a+b+c)$

$M=16\cdot 38k$

$M=576k$

$P=2B+M$

$1440=2\cdot 36k^2+576k$

$72k^2+576k-1440=0\rightarrow$ Podelimo sve sa 72

$k^2+8k-20=0\rightarrow$ kvadratna po ''k''

$k_{1,2}=\dfrac{-8\pm 12}{2}=k=2\Rightarrow$

$a=17\cdot 2=34cm$

$b=20cm$

$c=18cm$

5) Prava pravilna četvorostrana prizma ima visinu 16cm i površinu $370\,cm^2$. Izračunati osnovnu ivicu.

$H=16cm$

$P=370cm^2$

$a=?$

$P=2B+M$

$P=2a^2+4aH$

$370=2a^2+4a\cdot 16$

$370=2a^2+64a$

$2a^2+64a-370=0$

$a^2+32a-185=0$

$a_{1,2}=\dfrac{-32\pm 42}{2}$

$a_1=5$

$a_2=-38\rightarrow$ *Nemoguće*

$a=5$

Dakle osnovna ivica je $a=5$

NAPOMENA:

Neispravno je reći osnovna ivica je… već bi trebalo dužina osnovne stranice je…

Ako Vaš profesor insistira na ovome ispoštujte ga, jer je svakako u pravu.
Sve je stvar dogovora….

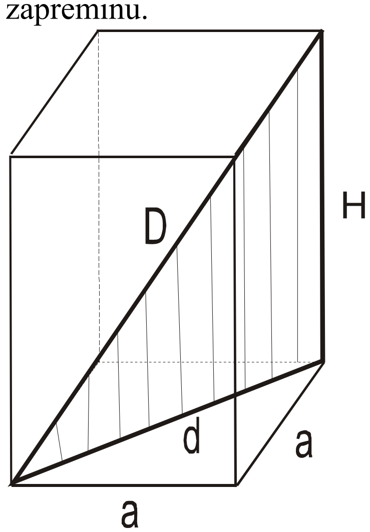
6) Izračunati površinu i zapreminu prave trostrane jednakoivične prizme ivice $a = 8cm$

Podatak da je u pitanju jednakoivična prizma nam govori da je osnovna ivica jednaka visini. To jest, omotač se ovde sastoji iz 3 kvadrata stranice a

$$a = 8$$
$$P = 2B + M$$
$$P = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2$$
$$P = 2\frac{8^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot 8^2$$
$$P = \frac{64\sqrt{3}}{2} + 64\cdot 3$$
$P = \left(32\sqrt{3} + 192\right)cm^2 \rightarrow$ Ovde ne bi bilo loše da se izvuče zajednički ispred zagrade!
$$P = 32\left(\sqrt{3} + 6\right)cm^2$$

$$V = B\cdot H$$
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$
$$V = \frac{8^3\sqrt{3}}{4} = \frac{512\sqrt{3}}{4}$$
$$V = 128\sqrt{3}cm^3$$

7) Pravilna četvorostrana prizma ima omotač $8\,m^2$ i dijagonalu $3\,m$. Izračunati njenu zapreminu.



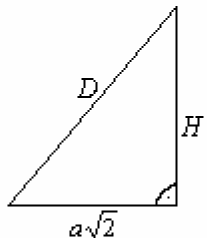
$M = 8cm^2$

$D = 3m$

$V = ?$

Pošto je $M = 4aH \quad \Rightarrow \quad 4aH = 8 \Rightarrow aH = 2$

Iz trougla:



je $$H^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = D^2$$
$$H^2 + 2a^2 = 9$$

<u>Napravimo sistem:</u>

$aH = 2 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{2}{a}$ $\rightarrow$ Zamenimo u drugu jednačinu

$$H^2 + 2a^2 = 9$$
$$\left(\frac{2}{a}\right)^2 + 2a^2 = 9$$
$$\frac{4}{a^2} + 2a^2 = 9 \rightarrow \text{ Smena: } a^2 = t$$
$$\frac{4}{t} + 2t = 9$$
$$2t^2 - 9t + 4 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{4}$$
$$t_1 = 4$$
$$t_2 = \frac{1}{2}$$

Vratimo se u smenu:

$$a^2 = 4$$
$$a = 2m$$
$$H = \frac{2}{a}$$
$$H = 1m$$
$$V = a^2 \cdot H$$
$$V = 2^2 \cdot 1$$
$$V = 4m^3$$

ili

$$a^2 = \frac{1}{2}$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} m$$
$$H = 2\sqrt{2}m$$
$$V = a^2 \cdot H$$
$$V = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 2\sqrt{2}$$
$$V = \frac{2}{4} \cdot 2\sqrt{2}$$
$$V = \sqrt{2}m^3$$

<u>Pazi:</u> Ovde imamo 2 moguća rešenja, i oba su "dobra" jer zadovoljavaju zadate početne uslove!!!

8) Odrediti površinu i zapreminu kocke u funkciji površine dijagonalnog preseka.

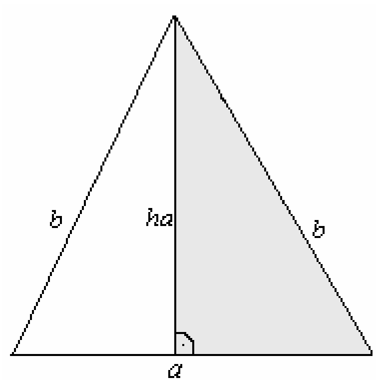
Površina dijagonalnog preseka je:

$$Q = a^2\sqrt{2}$$
$$a^2 = \frac{Q}{\sqrt{2}}$$
$$a = \sqrt{\frac{Q}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{2}} \rightarrow Racionališemo$$
$$a = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt{Q}\sqrt[4]{8}}{2}$$

$$P = 6a^2 = 6 \cdot \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{6Q}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}Q$$
$$V = 6a^3 = 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{Q}\sqrt[4]{8}}{2}\right)^3 = \frac{6\sqrt{Q}^3 \cdot \sqrt[4]{8^3}}{8}$$
$$V = \frac{6\sqrt{Q}^3 \cdot 4 \cdot \sqrt[4]{2}}{8} = 3\sqrt{Q}^3\sqrt[4]{2}$$
$$V = 3aQ\sqrt{Q}\sqrt[4]{2}$$

PAZI: $\sqrt[4]{8^3}=\sqrt[4]{(2^3)^3}=\sqrt[4]{2^9}=\sqrt[4]{2^8}\cdot\sqrt[4]{2}$
$=2^2\cdot\sqrt[4]{2}=4\cdot\sqrt[4]{2}$

9) Osnova prava prizme je jednakostranični trougqo osnovice 10dm, a visina tog trougla jednaka je visini prizme. Ako je zapremina prizme $720dm^3$, izračunati površinu prizme.



$$a=10dm$$
$$h_a=H$$
$$V=720dm^3$$

$$V=B\cdot H$$
$$V=\frac{a\cdot h_a}{2}\cdot H$$
$$720=\frac{10\cdot H}{2}\cdot H$$
$$720=5H^2$$
$$H^2=144$$
$$H=12dm$$
$$h_a=12dm$$

Primenimo Pitagorinu teoremu na jednakokraki trougao:

$$b^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+h_a^{\ 2}$$
$$b^2=\left(\frac{10}{2}\right)^2+12^2$$
$$b^2=5^2+12^2$$
$$b^2=169$$
$$b=13dm$$

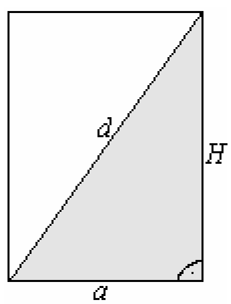
$$P=2B+M$$
$$P=2\cdot\frac{ah_a}{2}+aH+2bH$$
$$P=ah_a+H(a+2b)$$
$$P=10\cdot12+12\cdot(10+26)$$
$$P=120+432$$
$$P=552dm^2$$

10) Osnova prave prizme je romb čije su dijagonale $d_1=18cm,\quad d_2=24cm,$ dok je dijagonala bočne stranice prizme $d=39cm$. Izračunati površinu prizme.

Najpre primenimo Pitagorinu teoremu na romb.

$$a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$
$$a^2=\left(\frac{18}{2}\right)^2+\left(\frac{24}{2}\right)^2$$
$$a^2=81+144$$
$$a^2=255$$
$$a=15cm$$

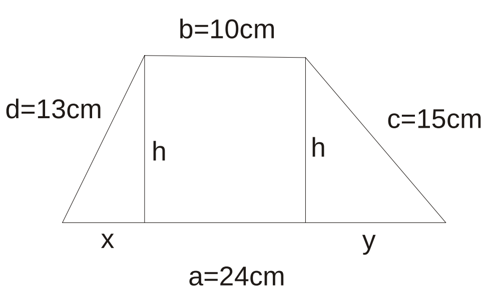
Pogledajmo jednu bočnu stranu:



$$H^2=d^2-a^2$$
$$H^2=39^2-15^2$$
$$H^2=1521-225$$
$$H^2=1296$$
$$H=36cm$$

$$P=2B+M$$
$$P=2\cdot\frac{d_1\cdot d_2}{2}+4aH$$
$$P=18\cdot 24+4\cdot 15\cdot 36$$
$$P=432+2160$$
$$P=2592cm^2$$

11) Osnova prizme je trapez čije su osnove 24cm i 10cm, a kraci 13cm i 15cm. Izračunati površinu i zapreminu ako je njena visina jednaka visini trapeza.



→ Spustimo visine i obeležimo ‘’deliće’’ sa x i y

$$\left.\begin{aligned} h^2 &= d^2 - x^2 \\ h^2 &= c^2 - y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d^2 - x^2 = c^2 - y^2$$

$$169 - x^2 = 225 - y^2$$

$$y^2 - x^2 = 225 - 169$$

$$y^2 - x^2 = 56$$

$$(y - x)(y + x) = 56$$

Kako je $x + y = a - b$

$x + y = 14$ Imamo

$$(y - x) \cdot 14 = 56$$

$$y - x = 4$$

Sada imamo sistem:

$$\left.\begin{aligned} y + x &= 14 \\ y - x &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2y = 18$$

$$y = 9cm$$

Vratimo se u:

$$h^2 = c^2 - y^2$$

$$h^2 = 15^2 - 9^2$$

$$h^2 = 225 - 81$$

$$h = 12cm$$

$$H = 12cm$$

$$P = 2B + M$$

$$B = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

$$B = \frac{24 + 10}{2} \cdot 12$$

$$B = 17 \cdot 12$$

$$B = 204cm^2$$

<u>PAZI:</u> M se sastaju iz četiri različita pravougaonika:

$$M = H(a + b + c + d)$$

$$M = 12 \cdot (24 + 10 + 13 + 15)$$

$$M = 12 \cdot 62$$

$$M = 744cm^2$$

$$P = 2 \cdot 204 + 744$$

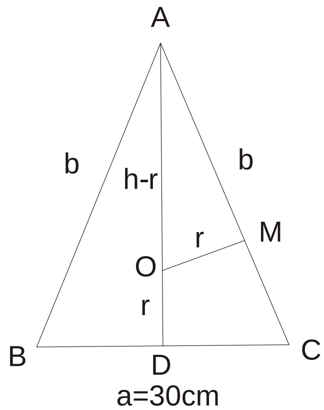
$$P = 1152cm^2$$

$$V = B \cdot H$$

$$V = 204 \cdot 12$$

$$V = 2448cm^3$$

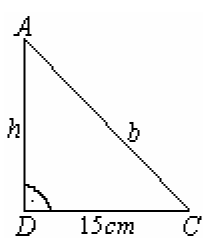
12) Osnova prizme je jednakostranični trougao osnovice 30cm i poluprečnik upisane kružnice 10cm. Izračunati zapreminu prizme ako je njena visina jednaka visini trougla koja odgovara osnovici.

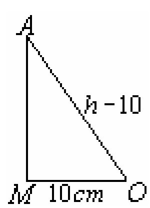


$$a = 30cm$$
$$r = 10cm$$
$$ha = H$$
$$V = ?$$

I Način

Iz sličnosti trouglova trougla ABC ~ trougla AMO





$$\Rightarrow 15:10 = b:(h-10)$$
$$15(h-10) = 10b$$
$$15h - 150 = 10b$$
$$3h - 30 = 2b$$
$$h = \frac{2b+30}{3}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = b^2$$

$$15^2 + \left(\frac{2b+30}{3}\right)^2 = b^2$$

$$2025 + 4b^2 + 120b + 900 = 9b^2$$

$$5b^2 - 120b - 2925 = 0$$

$$b^2 - 24b - 585 = 0$$

$$b_{1,2} = \frac{24 \pm 54}{2}$$

$$b_1 = 39cm$$

$$b_2 = Nemoguće$$

$$b = 39cm$$

$$B = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{30 \cdot 36}{2} = 540$$

$$V = BH$$

$$V = 540 \cdot 36$$

$$V = 19440cm^3$$

Sada je $h_a = 36cm = H$

Ovaj zadatak smo mogli rešiti I na drugi način.

II Način

Znamo obrasce za površinu:

$$P = r \cdot S \qquad \text{i} \qquad P = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

to jest: $S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+2b}{2} = \frac{30+2b}{2}$

$$S = 15 + b$$

$$P = \sqrt{(15+b)(15+b-30)(15+b-b)(15+b-b)}$$

$$P = \sqrt{(15+b)(b-15) \cdot 15^2}$$

$$P = 15\sqrt{b^2 - 15^2} = 15\sqrt{b^2 - 225}$$

S druge strane je

$P = r \cdot s = 10 \cdot (15 + b)$

$P = P$

$10(15 + b) = 15\sqrt{(b - 15)(b + 15)}$

$100(15 + b)^2 = 15^2 (b - 15)(b + 15)$

$100(15 + b) = 225(b - 15)$

Odavde je $b = 39cm$